4.8. $X \sim N(10, 9)$ dağılımında aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

a) $P(X < 11)$ b) $P(X > 7)$ c) $P(X < 12)$ d) $P(X > 4)$

e) $P(8 < X < 11)$ f) $P(7 < X < 8)$ g) $P(4 < X < 14)$

4.9. Bir sınıftaki öğrencilerin 0.20'si sigara içmektedirler. Bu öğrenciler arasından 3 tanesi rastgele seçilirse,

a) Hepsinin de sigara içmemesi,

b) İkisinin sigara içmesi

c) En az ikisinin sigara içmesi,

d) En fazla birinin sigara içmesi

olasılıkları kaçtır?

4.10. Bir firmanın ürettiği elektrik süpürgelerinin %10'u garanti süresi içinde arızalanmaktadır. Satışı yapılan elektrik süpürgeleri arasından rastgele olarak 100 tanesi seçilirse,

a) En fazla 11'inin,

b) En fazla 6'sının,

c) En az 3'ünün,

garanti süresi içinde arızalanması olasılıklarını hesaplayınız.

4.11. Bir servis istasyonuna 1 saatte ortalama 3 müşteri gelmektedir. Bu servis istasyonuna önümüzdeki ilk 1 saat içinde,

a) Müşteri gelmemesi

b) 2 müşteri gelmesi

c) En fazla 3 müşteri gelmesi

d) 5 müşteri gelmesi

olasılıklarını bulunuz.

4.12. Bir üniversitedeki öğrencilerin 0.60'ının kütüphaneyi kullanma alışkanlığına sahip olduğu bilinmektedir. Bu üniversitenin öğrencilerinden 200 tanesi seçilse, bunlar içinde kütüphaneyi kullanma alışkanlığı olanların sayısının

a) En az 130 b) En az 125 c) En az 115 d) En fazla 132

olması olasılıklarını hesaplayınız.

4.13. Bir işyerinde işe geç gelenlerin "geç kalma süresine" göre dağılımı normal olup ortalaması 20 dakika ve varyansı 16'dır. İşyeri yönetimi geç kalma süresi bakımından ilk %20 dışında kalanlar için uyarı yapmak istemektedir. Uyarı almamak için geç kalma süresi en fazla kaç dakikadır?

Bölüm 5
ÖRNEKLEME DAĞILIMI VE HİPOTEZ KAVRAMI

5.1 ÖRNEKLEME

İstatistikte amaç, ele alınan bir yığın parametreleri hakkında bilgi [illegible]dır. Yığın parametrelerinin hesaplanabilmesi için yığındaki tüm birimler üzerinden [illegible] değişkenleri için [illegible] veri derlenmesi gerekir. [illegible] de verilen μ, σ^2 ve σ birer parametredir. Parametrelerin hesaplanabilmesi için mutlak [illegible] istatistiksel verinin yığındaki tüm birimler üzerinden toplanması [illegible]dır. Yığındaki birim sayısı fazla değil ve yığın az sayıda birimden oluşuyorsa bu birimlerden istatistiksel verinin toplanması zor olmaz. Ancak yığın az sayıda birimden oluşacak şekilde tanımlandığında parametrelerin hesaplanmış olması önemli bir bilgi değildir. Yığın çok sayıda birimden oluşacak şekilde tanımlandığında, parametreler bilinirse, bu önemli bir bilgidir. Ancak, yığındaki birim sayısı arttıkça yığından istatistiksel verinin toplanması güçleşir. Diğer yandan, yığın sonsuz ise bu durumda yığın için istatistiksel veri oluşturulamayacağı için parametrelerin hesaplanması mümkün değildir.

Parametrelerin hesaplanmasının mümkün olmadığı ya da hesaplanmalarının çok zor olduğu durumlarda yığın parametreleri hakkında bilgilerin nasıl edinileceği istatistiğin çıkarımsal kolunu oluşturur. Çıkarımsal istatistikte yığından rastgele (tesadüfi) örnekler seçilerek bu örneklerden hesaplanacak istatistikler aracılığıyla yığın parametreleri hakkında bilgiler edinilmeye çalışılır. Yığından rastgele örneklerin nasıl seçileceği istatistiğin uzmanlık alanlarından biri olan örneklemenin konusunu oluşturur.

Örnekleme günlük yaşantımızda sık sık karşımıza çıkan bir olgudur. Örneğin öğle yemeği için iki defa Boğaziçi lokantasına giden biri, şayet yemekleri beğenmişse, Boğaziçi lokantasının yemeklerinin iyi olduğunu söyler. Oysa bu kişi Boğaziçi lokantasına sadece iki defa gitmiştir. Boğaziçi lokantasının ara günlerdeki ya da daha önceki günlerdeki yemeklerinin kalitesi hakkında bilgisi yoktur. Yığın parametreleri hakkında bilgi edinilmesinde örneklemeden yararlanılması, sınırlı bütçe, zaman faktörü, fiziksel sınırlamalar ve kalifiye eleman yetersizliği gibi nedenlerden de kaynaklanabilir.

Yığından rastgele örneklerin seçimi için öncelikle yığını oluşturan birimlerin bilinmesi gerekir. Örneklemede yığını oluşturan birimlerin listesine *çerçeve* denir. Yığındaki birim sayısı N ile gösterilir. Bu N sayıda birim içinden, $n < N$ olmak üzere, n tanesinin seçimi *olasılı olmayan örnekleme* ve *olasılı örnekleme* yöntemleri ile yapılabilir.

Olasılı olmayan örnekleme *keyfi örnekleme* olarak da bilinmektedir. N sayıda birim içinden n tanesinin seçimi araştırmacı tarafından keyfi olarak saptanırsa bu tür örnekleme yöntemine *olasılı olmayan örnekleme* denir. Örnek seçiminin subjektif yargılara dayanması nedeniyle bu tür örnekleme yöntemi araştırmalarda tercih edilmez. Yığındaki N sayıda birimin her birine belirli ve sıfırdan farklı bir olasılıkla örneğe seçilme şansı veren örneklemeye *olasılı örnekleme* denir. Bu tür örnekleme yöntemleri yığındaki herhangi bir birimin örneğe bir defadan fazla girip girmemesine göre *yerine koymadan örnek seçimi* ve *yerine koyarak örnek seçimi* olmak üzere ikiye ayrılır.

Yığındaki herhangi bir birim örneğe seçilince aynı birime tekrar örneğe girme şansı veriliyorsa bu tür örneklemeye *yerine koyarak örnekleme* denir. Bir birime sadece bir defa örneğe çıkma şansı veriliyorsa bu tür örneklemeye *yerine koymadan örnekleme* denir.

Yığını belirli değişken ya da değişkenler bakımından betimlemek amacıyla hesaplanan parametrelerin en temel özelliği birer sabit olmalarıdır. Yığından rastgele seçilen örneklerden hesaplanan değerlere *istatistik* denir. Örnek için aritmetik ortalama, oran ve varyans sırasıyla $\bar{X}$, P ve S^2 notasyonları ile gösterilir ve aşağıdaki formüller ile hesaplanır.

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i, \qquad \delta_i = \begin{cases} 1, & i.\ \text{birim ilgilenilen özellikte ise} \\ 0, & i.\ \text{birim ilgilenilen özellikte değilse} \end{cases}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$\bar{X}$, P ve S^2 istatistikleri daha sonraki bölümlerde sıkça kullanılacaktır. İstatistiklerin parametrelerden farkı birer değişken olmalarıdır. Yığındaki N sayıda birim içinden n tanesi rastgele seçilsin ve $\bar{X}$ istatistiği hesaplansın. Aynı yığından n birimlik bir rastgele örnek daha seçilip $\bar{X}$ istatistiği hesaplandığında, genellikle, farklı değer elde edilir. Bu özellik nedeniyle istatistikler birer değişken olduklarından her birinin dağılımları ve varyansları vardır.

5.2. ÖRNEKLEME DAĞILIMI VE STANDART HATA

Örnekleme dağılımı ve standart hata çıkarımsal istatistiğin önemli iki kavramıdır. İstatistiklerin dağılımlarına *örnekleme dağılımları* adı verilir. Her istatistiğe ilişkin bir örnekleme dağılımı vardır. Π parametresi için P istatistiğinin, σ^2 parametresi için S^2 istatistiğinin ve μ parametresi için $\bar{X}$ istatistiğinin örnekleme dağılımları vardır. Bunlardan $\bar{X}$ ve S^2 istatistiklerinin örnekleme dağılımlarının açıklanması ile yetinilecektir. Örnekleme dağılımının oluşturulabilmesi için ilgili istatistiğin kaç farklı durumda hesaplanabileceğinin bilinmesi gereklidir.

Örnekleme dağılımı herhangi bir istatistiğin alabileceği değerlerin ve bu değerlerin olasılıklarının bulunarak birer olasılık dağılımı oluşturulması temeline dayanır. Bu işlemin $\bar{X}$ istatistiği için nasıl yapılabileceğini açıklayalım. N sayıda birim içinden n tanesini rastgele seçerek $\bar{X}$ istatistiğinin örnekleme dağılımı oluşturalım. Öncelikle N tane birim içinden n tanesinin kaç farklı şekilde seçilebileceğinin bilinmesi gerekir. Örnek seçimi yerine koymadan yöntemi ile yapılırsa $\binom{N}{n}$ kadar farklı durum söz konusudur. Örnek seçimi yerine koyarak yöntemi ile yapıldığında N^n kadar farklı durum söz konusudur. $\binom{N}{n}$ ya da N^n kadar farklı durumda $\bar{X}$ istatistiğinin değeri hesaplandığında oluşturulacak olasılık dağılımı, $\bar{X}$ istatistiğinin örnekleme dağılımı olacaktır. $\bar{X}$ istatistiği için örnekleme dağılımı oluşturulduğunda bu dağılımın beklenen değeri ve varyansı ne olacaktır? Bu değerlerle yığına ilişkin parametreler arasında ilişki var mıdır? Bu soruların yanıtlarını verebilmek için $N = 5$ birimden oluşan bir yığın düşünelim. Bu yığındaki X değişken değerlerinin aşağıdaki gibi olduğunu kabul edelim.

$$X_i: 20, 18, 22, 16, 24$$

$n = 2$ çaplı rastgele örnekler seçilip $\bar{X}$ istatistiğinin örnekleme dağılımı oluşturulduğunda bu dağılımın beklenen değer ve varyansının yığına ilişkin ortalama ve varyans ile ilişkisini görmek için önce μ ve σ^2 parametreleri hesaplanmıştır.

N=5 birimlik bu istatistiksel veri için parametreler.

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\mu = \frac{1}{5}(20+18+22+16+24) = 20$$

ve

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\left[(20-20)^2 + (18-20)^2 + (22-20)^2 + (16-20)^2 + (24-20)^2\right]}{5} = 8$$

olarak hesaplanır.

$\sigma^2_{\bar{x}}$ nın pozitif karekökü çıkarımsal istatistiğin önemli kavramlarından biridir. Bu değer *standart hata* olarak bilinir.

$\sigma_{\bar{x}}$ Standart hata

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{3}$$

İstatistiklerin örnekleme dağılımlarının oluşturulmasından çok ilgili istatistiğin örnekleme dağılımının biçimi ve parametrelerinin bilinmesi önemlidir. Çünkü bu durumda, dağılım normal ise 11 tablosu aracılığıyla olasılık hesaplamaları yapılabilir. Örnek seçiminin yerine koymadan yöntemi ile yapılması durumunda, yığın parametreleri ile örnekleme dağılımın parametreleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{ve} \quad \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{N-n}{N-1}\,\frac{\sigma^2}{n}$$

Daha önce hesaplanmış $\sigma^2 = 8$ değeri varyans formülünde yerine konursa

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{5-2}{5-1}\,\frac{8}{2} = 3$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $\sigma^2_{\bar{x}}$ hem örnekleme dağılımı oluşturularak hem de yukarıdaki eşitlikten hesaplanabilmektedir. Yığına ilişkin varyans bilinmiyorsa $\sigma^2_{\bar{x}}$ yerine $S^2_{\bar{x}}$ kullanılır.

$$S^2_{\bar{x}} = \frac{N-n}{N-1}\,\frac{S^2}{n}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

(N–n)/(N–1) çarpanı *düzeltme terimi* olarak bilinir. $n/N < 0.05$ ise kullanılmaması $\sigma^2_{\bar{x}}$ değerini pek fazla etkilemez. Çünk0 bu durumda (N–n)/(N–1) değeri 1 e yakın olacaktır. Sonuç olarak (N – n)/(N – 1) terimi kullanılmadığında $S^2_{\bar{x}}$ ve $\sigma^2_{\bar{x}}$ aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}, \qquad S^2_{\bar{x}} = \frac{S^2}{n}$$

- Örnek seçimi *yerine koyarak yöntemi* ile yapıldığında $\bar{X}$ istatistiği $5^2 = 25$ farklı durumda hesaplanabilir. Bu farklı durumlar ve $\bar{X}$ istatistiğinin değerleri aşağıdadır.

Örnek No	Örnek değerleri	$\bar{X} = (\sum X_i)/n$
1	20,20	20
2	20,18	19
3	20,22	21
4	20,16	18
5	20,24	22
6	18,20	19
7	18,18	18
8	18,22	20
9	18,16	17
10	18,24	21
11	22,20	21
12	22,18	20
13	22,22	22
14	22,16	19
15	22,24	23
16	16,20	18
17	16,18	17
18	16,22	19
19	16,16	16
20	16,24	20
21	24,20	22
22	24,18	21
23	24,22	23
24	24,16	20
25	24,24	24

$\bar{X}$ istatistiğinin aldığı değerlerden oluşturulan olasılık dağılımı aşağıda verilmiştir.

$\bar{X}_i$	$P(\bar{X}_i)$
16	1/25
17	2/25
18	3/25
19	4/25
20	5/25
21	4/25
22	3/25
23	2/25
24	1/25

Bu olasılık dağılımı $\bar{X}$ istatistiğinin örnekleme dağılımıdır.

$N = 5$ birimden oluşan bu yığından $n = 2$ çaplı örneklerin seçilmesi durumunda $\bar{X}$ istatistiği için örnekleme dağılımının oluşturulması iki farklı durum için ayrı ayrı açıklanmıştır.

- Örnek seçimi *yerine koymadan yöntemi* ile yapıldığında $\bar{X}$ istatistiği $\binom{5}{2} = 10$ farklı durumda hesaplanabilir. Bu farklı durumlar ve $\bar{X}$ istatistiğinin değerleri aşağıdadır.

Örnek No:	Örnek değerleri	$\bar{X} = (\Sigma X_i)/n$
1	20,18	19
2	20,22	21
3	20,16	18
4	20,24	22
5	18,22	20
6	18,16	17
7	18,24	21
8	22,16	19
9	22,24	23
10	16,24	20

$\bar{X}$ istatistiğinin aldığı değerler kullanılarak oluşturulan olasılık dağılımı aşağıdadır.

$\bar{X}_j$	$P(\bar{X}_j)$
17	1/10
18	1/10
19	2/10
20	2/10
21	2/10
22	1/10
23	1/10

$\bar{X}$ istatistiğine ilişkin bu olasılık dağılımı $\bar{X}$ istatistiğinin örnekleme dağılımı olarak bilinir. Örnekleme dağılımı ilgili istatistiğin belli bir değerden daha küçük veya daha büyük değerler alması olasılığının hesaplanmasında kullanılabilir.

$$P(\bar{X} > 21) = 2/10 + 1/10 + 1/10 = 4/10$$

$$P(\bar{X} < 18) = 1/10 + 1/10 = 1/5$$

N büyük ise örnekleme dağılımının oluşturulması kolay olmaz. $\bar{X}$ istatistiğinin beklenen değeri ve varyansını sırasıyla $E(\bar{X})$ ve $\sigma^2_{\bar{X}}$ ile gösterelim.

$E(\bar{X})$ ve $\sigma^2_{\bar{X}}$ hesabı için gerekli işlemler aşağıdadır.

Kesikli değişkenler için beklenen değerin tanımından

$$E(\bar{X}) = \Sigma \bar{X}_j P(\bar{X}_j)$$

olarak yazılabilir. Buna göre

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{10}[17+18+19(2)+20(2)+21(2)+22+23]$$

$$E(\bar{X}) = \frac{200}{10} = 20$$

ve

$$E(\bar{X}) = \mu$$

sonucu bulunur.

$\bar{X}$ istatistiğine ilişkin beklenen değer yığına ilişkin aritmetik ortalamaya eşittir. $\bar{X}$ istatistiğinin varyansı da aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \Sigma(\bar{X}_j - \mu)^2 P(\bar{X}_j)$$

Varyans hesabı için gerekli hesaplamalar aşağıdadır.

$\bar{X}_j$	$P(\bar{X}_j)$	$\bar{X}_j - \mu$	$(\bar{X}_j - \mu)^2$	$(\bar{X}_j - \mu)^2 P(\bar{X}_j)$
17	1/10	−3	9	9/10
18	1/10	−2	4	4/10
19	2/10	−1	1	2/10
20	2/10	0	0	0/10
21	2/10	1	1	2/10
22	1/10	2	4	4/10
23	1/10	3	9	9/10
				30/10

$$\sigma^2_{\bar{X}} = 30/10$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = 3$$

N büyük iken örnek seçimi yerine koyarak yöntemi ile yapıldığında örnekleme dağılımının oluşturulması daha fazla işlem gerektirir. $E(\bar{X})$ hesabı için işlemler aşağıdadır.

$$E(\bar{X}) = \Sigma \bar{X}_i P(\bar{X}_i)$$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{25}[16+17(2)+18(3)+19(4)+20(5)+21(4)+22(3)+23(2)+24]$$

$$E(\bar{X}) = \frac{500}{25} = 20$$

$$E(\bar{X}) = \mu$$

Görüldüğü gibi örnek seçimi ister yerine koyarak ister yerine koymadan yapılsın $\bar{X}$ istatistiğinin beklenen değeri yığın ortalamasına eşittir.

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \Sigma(\bar{X}_i - \mu)^2 P(\bar{X}_i)$$

ile varyans hesabı için gerekli işlemler aşağıda verilmiştir.

$\bar{X}_i$	$P(\bar{X}_i)$	$\bar{X}_i - \mu$	$(\bar{X}_i - \mu)^2$	$(\bar{X}_i - \mu)^2 P(\bar{X}_i)$
16	1/25	–4	16	16/25
17	2/25	–3	9	18/25
18	3/25	–2	4	12/25
19	4/25	–1	1	4/25
20	5/25	0	0	0/25
21	4/25	1	1	4/25
22	3/25	2	4	12/25
23	2/25	3	9	18/25
24	1/25	4	16	16/25
				100/25

Bu sonuçlara göre

$$\sigma^2_{\bar{X}} = 100/25 = 4$$

ve standart hata da

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{4} = 2$$

olur.

Örnek seçimi yerine koyarak yöntemi ile yapıldığında $\sigma^2_{\bar{X}}$ değeri, yukarıdaki hesaplamaları yapmadan,

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

eşitliğinden bulunabilir. $\sigma^2 = 8$ ve $n = 2$ eşitlikte yerlerine konursa aynı sonuca ulaşılır.

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{8}{2}$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = 4$$

Görüldüğü gibi $E(\bar{X})$ ve $\sigma^2_{\bar{X}}$ hem örnekleme dağılımı oluşturularak hem de

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

eşitliklerinden elde edilebilmektedir. Yığına ilişkin varyans bilinmiyorsa $\sigma^2_{\bar{X}}$ yerine $S^2_{\bar{X}}$ kullanılır.

$$S^2_{\bar{X}} = \frac{S^2}{n}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Π parametresi için P istatistiğinin örnekleme dağılımının beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki formüllerden elde edilebilir.

- Örnek seçimi *yerine koymadan* yapıldığında

$$E(P) = \Pi, \quad \sigma^2_P = \frac{N-n}{N-1}\frac{\Pi(1-\Pi)}{n}$$

- Örnek seçimi *yerine koyarak* yapıldığında

$$E(P) = \Pi, \quad \sigma^2_P = \frac{\Pi(1-\Pi)}{n}$$

$\bar{X}$ istatistiğinin örnekleme dağılımının oluşturulmasında kullandığımız veriyi S^2 istatistiğinin örnekleme dağılımının oluşturulmasında da kullanalım. Hatırlanacağı gibi $N = 5$ birim içinden $n = 2$ tanesinin yerine koyarak yöntemi ile seçimi $5^2 = 25$ farklı durumda oluyordu. Bu 25 farklı durum, her farklı durumda örneğe giren birimlerin değerleri, $\bar{X}$ ve S^2 istatistiklerinin aldıkları değerler aşağıda görülmektedir.

Örnek No	Örnek Değerleri	$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
1	20,20	20	0
2	20,18	19	2
3	20,22	21	2
4	20,16	18	8
5	20,24	22	8
6	18,20	19	2
7	18,18	18	0
8	18,22	20	8
9	18,16	17	2
10	18,24	21	18
11	22,20	21	2
12	22,18	20	8
13	22,22	22	0
14	22,16	19	18
15	22,24	23	2
16	16,20	18	8
17	16,18	17	2
18	16,22	19	18
19	16,16	16	0
20	16,24	20	32
21	24,20	22	8
22	24,18	21	18
23	24,22	23	2
24	24,16	20	32
25	24,24	24	0

S^2 istatistiğinin aldığı değerlerden bir olasılık dağılımı oluşturalım.

S_j^2	$P(S_j^2)$
0	5/25
2	8/25
8	6/25
18	4/25
32	2/25

Bu olasılık dağılımı S^2 istatistiğinin örnekleme dağılımıdır. S^2 istatistiği

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

olarak tanımlandığında σ^2 için sapmasız bir tahmin edicidir. *Sapmasızlık* istatistiğin beklenen değerinin parametreye eşit olmasıdır. Bu özellik $E(S_j^2)$ hesaplanarak görülebilir.

Hatırlanacağı gibi 20, 18, 22, 16 ve 24 değerlerine ilişkin σ^2 parametresi 8 olarak daha önce hesaplanmıştı.

$$E(S^2)=\sum S_j^2P(S_j^2)$$

$$=\frac{1}{25}[0(5)+2(8)+8(6)+18(4)+32(2)]=8$$

dolayısıyla $E(S^2)=\sigma^2$. Yani S^2 istatistiğinin beklenen değeri σ^2 parametresine eşittir. Bu ise S^2 istatistiğinin sapmasız tahmin edici olduğunu belirtir.

$N = 5$ birim içinden $n = 2$ tanesinin yerin koymadan yöntemi ile seçimi $\binom{5}{2}=10$ farklı durumda ortaya çıkabilir. Bu farklı durumlar, her farklı durum için örneğe giren birimlerin değerleri, $\bar{X}$ ve S^2 istatistiklerinin aldıkları değerler aşağıda görülmektedir.

Örnek No	Örnek Değerleri	$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
1	20,18	19	2
2	20,22	21	2
3	20,16	18	8
4	20,24	22	8
5	18,22	20	8
6	18,16	17	2
7	18,24	21	18
8	22,16	19	18
9	22,24	23	2
10	16,24	20	32

S^2 istatistiğinin aldığı değerlerden bir olasılık dağılımı oluşturalım.

S_j^2	$P(S_j^2)$
2	4/10
8	3/10
18	2/10
32	1/10

Bu olasılık dağılımı S^2 istatistiğinin örnekleme dağılımıdır. Örnek seçimi yerine koymadan yöntemi ile yapıldığında S^2 istatistiğinin beklenen değeri σ^2 parametresine eşit değildir.

$$E(S^2)>\sigma^2,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$E(S^2) > \sigma^2$ ifadesinin doğru olduğunu sayısal olarak görelim. σ^2=8 olduğu biliniyor.

$$E(S^2) = \sum S_j^2 P(S_j^2)$$

$$= \frac{1}{10}[2(4) + 8(3) + 18(2) + 32(1)]=10$$

elde edilir.

Örnek seçimi yerine koymadan yöntemi ile yapıldığında S^2 istatistiğinin sapmasız tahmin edici olmasını sağlamak için $(N-1)/N$ düzeltme terimi kullanılır.

$$E(\frac{N-1}{N} S^2) = \sigma^2$$

$$E(\frac{N-1}{N} S^2) = \frac{N-1}{N} E(S^2)$$

$$= \frac{4}{5} 10 = 8$$

$$\frac{N-1}{N} E(S^2) = \sigma^2$$

Ancak N çok büyük ise düzeltme teriminin kullanılmaması, $(N-1)/N \cong 1$ olduğundan, sonuçları hemen hemen hiç etkilemez.

ERKEZİ LİMİT KURAMI